1) LOS NÚMEROS

El sistema de números reales consiste en un conjunto *R* de elementos llamados <u>*números reales*</u> y dos operaciones denominadas: adición y multiplicación, que se denotan con los símbolos + y · , respectivamente. Si *a* y *b* son elementos del conjunto *R*, entonces *a*+*b* denota la suma de *a* y *b*; también *a*·*b* (ó *ab*) indica su producto. La operación de sustracción se define mediante: $a+(-b)=a-b$, donde –*b* representa el negativo de *b* tal que, $b+(-b)=0$. La operación de división se define con la ecuación: $a \div b = a \cdot b^{-1}; b \neq 0$, donde b^{-1} representa el recíproco de *b*, tal que $b \cdot b^{-1}=1$. Un número real puede ser negativo, positivo o cero. Cualquier número real se puede clasificar como racional o irracional.

Un <u>*número racional Q*</u> es cualquier número que se puede expresar como la razón de dos enteros. Es decir, un número racional es un número de la forma *p*/*q* donde *p* y *q* son enteros y $q \neq 0$. Los números racionales comprenden a los siguientes:

- Los <u>*enteros Z*</u>: son números racionales con denominador igual a 1 (*p*/*q* = *p*/1 = *p*), pueden ser positivos, negativos y cero:
  . . .,-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .
- Los <u>*naturales N*</u>*:* son números enteros (todos positivos):
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .
- *Fracciones positivas y negativas*, tales como:
  $. . ., \frac{2}{7}, -\frac{4}{5}, \frac{83}{5}, . . .$
- Los *decimales conmensurables positivos y negativos*, tales como:
  $\frac{236}{100}=2.36, \quad -\frac{3251}{1000000}=-0.003251$
- Los *decimales inconmensurables periódicos positivos y negativos*, tales como:
  $\frac{1}{3}=0.333.... \quad -\frac{61}{111}=-0.549549549....$

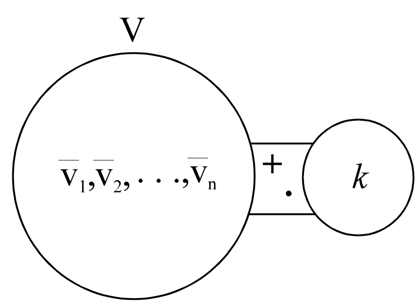
Los <u>*números irracionales*</u> son decimales inconmensurables y no periódicos, tales como:

$\sqrt{3}=1.732.... \qquad \pi=3.14159....$

Los <u>*números complejos C*</u> se expresan generalmente en la forma *a* +*bi*, donde *a* y *b* son números reales, *i* es la llamada unidad imaginaria, que se caracteriza por tener la propiedad de que $i^2=-1$.

2) ESPACIO VECTORIAL

Espacio vectorial es un conjunto constituido por un número infinito de vectores, para los cuales se han definido las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, y además están definidos sobre un determinado campo *k*. Esquemáticamente puede representarse como:



El campo *k* puede referirse a alguno de los siguientes números:

- Complejos
- Reales
- Racionales
- Irracionales
- Enteros
- Naturales

Los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n$ pueden tener distintas formas, por ejemplo:

R^2: $\bar{v}=(x, y) \rightarrow$ vector en dos dimensiones.

R^3: $\bar{v} = (x, y, z) \rightarrow$ vector en tres dimensiones.

M_2: $\bar{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz cuadrada de 2×2.

P: $\bar{v} = ax^2 + bx + c \rightarrow$ polinomio de grado menor o igual a dos.

F: $\bar{v} = f(x) \rightarrow$ función de cualquier forma.

OBSERVACIONES:

- Las operaciones de adición y multiplicación por un escalar para estos conjuntos generalmente no son las usuales.
- Al resolver un problema, en cada axioma se debe escribir si se cumple o no se cumple; y al final del problema, si el conjunto es o no un espacio vectorial.

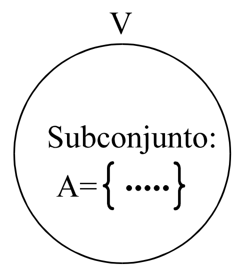
Para que un determinado conjunto sea un espacio vectorial, debe satisfacer los siguientes 10 axiomas:

Sean V un determinado conjunto; y $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ vectores que $\in V$.

1. Cerradura para la suma:
$$\bar{u} + \bar{v} \in V$$
2. Propiedad conmutativa de la suma:
$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$$
3. Propiedad asociativa de la suma:
$$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$$
4. Existencia de vector neutro $\bar{e}$:
$$\bar{e} + \bar{u} = \bar{u} \rightarrow \text{por la izquierda}$$
$$\bar{u} + \bar{e} = \bar{u} \rightarrow \text{por la derecha}$$
5. Existencia de inversos aditivos $\bar{z}$:
$$\bar{z} + \bar{u} = \bar{e} \rightarrow \text{por la izquierda}$$
$$\bar{u} + \bar{z} = \bar{e} \rightarrow \text{por la derecha}$$
6. Cerradura para la multiplicación:
$$\alpha \bar{u} \in V$$
7. Propiedad distributiva de la multiplicación para la suma de vectores:
$$\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \bar{u} + \alpha \bar{v}$$
8. Propiedad distributiva de la multiplicación para la suma de escalares:
$$(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{u}$$
9. Propiedad asociativa de la multiplicación:
$$\alpha(\beta \bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u}$$
10. Existencia de unicidad:
$$1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$$

3) SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea el espacio vectorial V:



Para que un subconjunto A sea un subespacio vectorial de V, deben cumplirse las siguientes dos condiciones:

1. Cerradura para la suma: $\bar{u} + \bar{v} \in A$
2. Cerradura para la multiplicación: $\alpha \bar{u} \in A$

es decir, que la suma entre vectores y el producto de un escalar por un vector de como resultado otro vector que tenga la misma forma (pertenezca) que los vectores del subconjunto A.

OBSERVACIONES:

- Las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, en este caso generalmente son las usuales.
- El subconjunto $\{\bar{0}\}$ es un subespacio vectorial.

PROPIEDAD IMPORTANTE DE LOS SUBESPACIOS VECTORIALES

La intersección de dos subespacios vectoriales, también es un subespacio vectorial.

Ejemplo, sean:

$$A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\middle|\, a,d\in R\right\} \rightarrow \text{S.E.V.}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\middle|\, a,b,d\in R\right\} \rightarrow \text{S.E.V.}$$

Entonces:

$$A\cap B=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \rightarrow \text{también es S.E.V.}$$

NOTA: $A \cap B$ = "*A* intersección *B*" es el conjunto constituido por todos aquellos vectores que se encuentran tanto en *A* como en *B*.

4) COMBINACIÓN LINEAL

Un vector $\overline{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n$, si puede ser expresado como:

$$\overline{w}=\alpha_1\overline{u}_1+\alpha_2\overline{u}_2+....+\alpha_n\overline{u}_n$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son escalares y *n* indica un número finito de vectores.

5) DEPENDENCIA LINEAL

Esta ecuación expresa al vector cero, $\overline{0}$, como una combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$:

$$\alpha_1\overline{v}_1+\alpha_2\overline{v}_2+....+\alpha_n\overline{v}_n=\overline{0}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son escalares y *n* indica un número finito de vectores.

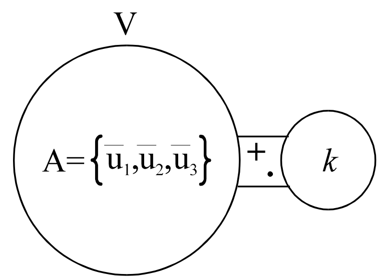
En la ecuación de dependencia lineal se distinguen dos casos:

CASO I.-Al menos un escalar en la ecuación de dependencia lineal es diferente de cero. Cuando esto ocurre, el conjunto se denomina *Linealmente Dependiente* (*L.D.*)

CASO II.- Todos los escalares en la ecuación de dependencia lineal son iguales a cero. Cuando esto ocurre, el conjunto se denomina *Linealmente Independiente* (*L.I.*)

6) CONJUNTO GENERADOR Y BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea el espacio vectorial *V*:



y sea $A=\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ un subconjunto $\in V$ definido sobre un campo *k*. Se dice que *A* es un *conjunto generador* del espacio vectorial *V*, si para todo vector $\overline{v}\in V$ existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, que permitan escribir:

$$\overline{v}=\alpha_1\overline{u}_1+\alpha_2\overline{u}_2+\alpha_3\overline{u}_3 \rightarrow \textit{Combinación lineal}$$

Se observa que si se pasara el vector $\overline{v}$ del lado derecho de la expresión anterior, ésta en realidad constituiría la ecuación de dependencia lineal, en la que al menos un escalar es $\neq 0$ (el escalar que multiplica a $\overline{v}$). Por tanto, un conjunto generador es un conjunto linealmente dependiente.

Por el contrario, un conjunto linealmente independiente es una base.

En resumen:

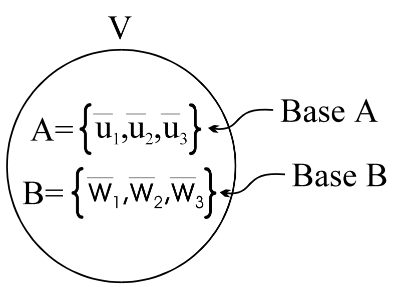
a) Si $A \in V$ es *Linealmente Dependiente*	**Es un conjunto generador del espacio vectorial *V***
b) Si $A \in V$ es *Linealmente Independiente*	**Es una base del espacio vectorial *V***

OBSERVACIONES:

- Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.
- La *dimensión* de un espacio vectorial es el *número de vectores* que tiene cualquier base de dicho espacio.
- El caso particular del conjunto $A = \{\bar{0}\}$, tiene dimensión cero: $\dim A = 0$.

7) VECTOR DE COORDENADAS

Sea el espacio vectorial *V*:



Todo vector $\bar{v} \in V$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores de las bases:

Para la Base *A*: $\bar{v} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \alpha_3 \bar{u}_3$

donde $\left(\bar{v}\right)_A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ es el *vector de coordenadas de* $\bar{v}$ *en la Base A.*

Para la Base *B*: $\bar{v} = \beta_1 \bar{w}_1 + \beta_2 \bar{w}_2 + \beta_3 \bar{w}_3$

donde $\left(\bar{v}\right)_B = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ es el *vector de coordenadas de* $\bar{v}$ *en la Base B.*

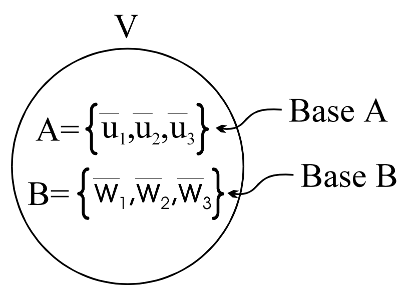
A partir de una combinación lineal, es posible obtener el llamado *vector de coordenadas* de un vector $\bar{v}$. Es decir, el vector de coordenadas está constituido por los escalares que intervienen en la combinación lineal referida a una determinada base.

OBSERVACIONES:

- El vector de coordenadas es un vector único referido a una base ordenada en particular.
- El orden en el que aparecen los escalares en el vector de coordenadas, corresponde al orden que tienen los vectores en la base.

8) MATRIZ DE TRANSICIÓN

Sea el espacio vectorial *V*:



Si se escriben los vectores de la *Base A* como combinación lineal de los vectores de la *Base B*:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= a_1 \bar{w}_1 + a_2 \bar{w}_2 + a_3 \bar{w}_3 \rightarrow \left(\bar{u}_1\right)_B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T \\
\bar{u}_2 &= b_1 \bar{w}_1 + b_2 \bar{w}_2 + b_3 \bar{w}_3 \rightarrow \left(\bar{u}_2\right)_B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^T \\
\underbrace{\bar{u}_3}_{Base\ A} &= \underbrace{c_1 \bar{w}_1 + c_2 \bar{w}_2 + c_3 \bar{w}_3 \rightarrow \left(\bar{u}_3\right)_B = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T}_{Base\ B}
\end{aligned}$$

donde $\left(\bar{u}_1\right)_B, \left(\bar{u}_2\right)_B, \left(\bar{u}_3\right)_B$ son los vectores de coordenadas de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ en la *Base B*, respectivamente.

La matriz de transición de la *Base A* a la *Base B*, M_B^A se forma con los vectores de coordenadas de las combinaciones lineales anteriores:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

CARACTERÍSTICAS DE LA MATRIZ DE TRANSICIÓN:

- Sus columnas son vectores de coordenadas obtenidos a partir de la combinación lineal de una base respecto a otra.
- Son matrices cuadradas (por ser combinaciones lineales entre bases).
- Siempre tienen inversa (por ser matrices cuadradas y cumplir det≠0).

La matriz de transición permite el cambio de coordenadas de una base a otra; por tanto, con la matriz de transición es posible calcular el vector de coordenadas:

$$(\bar{v})_B = M_B^A (\bar{v})_A \rightarrow \textit{vector de coordenadas de } \bar{v} \textit{ en la Base B.}$$

O bien, el vector:

$$(\bar{v})_A = M_A^B (\bar{v})_B \rightarrow \textit{vector de coordenadas de } \bar{v} \textit{ en la Base A.}$$

Además, puesto que la matriz de transición siempre tiene inversa, es posible calcular M_A^B a partir de la matriz M_B^A, con tan solo determinar su inversa, es decir:

$$M_A^B = \left(M_B^A\right)^{-1}$$

9) MATRIZ EN FORMA CANÓNICA ESCALONADA

A partir de transformaciones elementales es posible llevar a una matriz cualquiera a su forma canónica escalonada, que satisfaga las siguientes condiciones:

1. Debe ser, por supuesto, una matriz escalonada.
2. El primer elemento distinto de cero de cada fila debe ser = 1.
3. El resto de los elementos de la columna donde se encuentra el uno anterior, deben ser = 0.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que los “unos” no deben estar necesariamente en la diagonal principal.

OBSERVACIONES:

- Para una matriz determinada *A*, existe una y sólo una matriz en forma canónica escalonada.
- Los renglones ≠ 0 de una matriz en forma canónica escalonada, constituyen la base canónica de su espacio vectorial. Esta propiedad es válida para una matriz escalonada cualquiera; solo que en este caso, los renglones ≠ 0 constituyen una base, pero no la canónica.

10) ISOMORFISMO

TEOREMA: Los espacios vectoriales de la misma dimensión son isomorfos.

Es decir, todos los espacios vectoriales de la misma dimensión son, algebraicamente hablando, iguales. De esta manera, al estudiar un espacio vectorial cualquiera *V*, de dimensión *n*, se puede trabajar con vectores del espacio R^n y el resultado aplicarlo al espacio *V*.

Un espacio vectorial *V* es isomorfo con el espacio vectorial R^n si se establece una función biyectiva $f: V \to R^n$ entre ambos tal que $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall\ \alpha \in R$ se cumple que:

$$f\left(\bar{u}+\bar{v}\right) = f\left(\bar{u}\right) + f\left(\bar{v}\right)$$
$$f\left(\alpha\bar{u}\right) = \alpha \cdot f\left(\bar{u}\right)$$

Cuando se tienen *matrices* o *polinomios*, es posible aplicar el concepto de "isomorfismo" si se requiere escribir estos vectores como los renglones de una matriz (por ejemplo, para transformar una matriz a su forma canónica escalonada), o bien, en otros casos, se puede utilizar el isomorfismo para facilitar las operaciones algebraicas. En la siguiente tabla se proporcionan ejemplos de isomorfismos entre R^n y otros espacios vectoriales:

a)	Isomorfismo	(*)Espacio de los polinomios de grado ≤ 2	Espacio R^n
	$P_{\leq 2} \to R^3$	ax^2+bx+c	(a,b,c)
b)	Isomorfismo	(*)Espacio de las matrices de 2×2	Espacio R^n
	$M_{2\times 2} \to R^4$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	(a,b,c,d)

(*) Para llevar a cabo el isomorfismo, los polinomios pueden ser de cualquier grado y las matrices de cualquier dimensión *m*×*n*.

11) ESPACIOS VECTORIALES ASOCIADOS A UNA MATRIZ

A partir de los elementos que integran una matriz pueden definirse diversos espacios vectoriales. A dos de ellos se les conoce como:

- Espacio Renglón
- Espacio Columna

Espacio Renglón de *A*, es el espacio vectorial generado por los renglones de la matriz *A*.

Espacio Columna de *A*, es el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz *A*.

¿Cómo se obtiene el *espacio renglón* de una matriz *A* dada?

1. Mediante transformaciones elementales debe llevarse a la matriz *A* a su forma canónica escalonada.
2. Los renglones ≠ 0 de la matriz en forma canónica escalonada, constituyen los vectores de la base canónica del espacio vectorial buscado.
3. Si se escribe a esta base como una combinación lineal, es posible obtener el vector genérico $\bar{v}$ (que representa la forma general de todos los vectores del espacio vectorial buscado):
$$\bar{v} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + ... + n\bar{u}_n$$
4. El espacio renglón está constituido por este vector genérico $\bar{v}$. Por ejemplo, si $\bar{v} = \left(a, b, c-2a\right)$, entonces:
$$L\left(A_r\right) = \left\{\left(a,b,c-2a\right) \middle| a,b,c \in R\right\}$$
Es el *espacio renglón generado a partir de la matriz A*.

¿Cómo se obtiene el *espacio columna* de una matriz *A* dada?

- Puesto que ahora, el espacio vectorial es generado por las columnas de la matriz *A*. Lo primero es obtener la transpuesta de dicha matriz.
- En la matriz transpuesta A^T es posible realizar operaciones análogas al caso en que se obtuvo el *espacio renglón*; puesto que aquí las columnas ya se transformaron en renglones:

1. Nuevamente se lleva a la matriz A^T a su forma canónica escalonada.
2. Con los renglones $\neq 0$ se obtiene la base canónica del espacio vectorial.
3. A partir de la combinación lineal de dicha base, se obtiene el vector genérico $\bar{v}$ que indica la forma del *espacio columna* $L(A_c)$ buscado.

PROPIEDADES IMPORTANTES:

- El *espacio renglón* generado por una matriz A es distinto del *espacio columna* generado por la misma matriz A:

$$L\left(A_r\right) \neq L\left(A_c\right)$$

- La dimensión del *espacio renglón* generado por una matriz A es igual a la dimensión del *espacio columna* generado por la misma matriz A:

$$\dim L\left(A_r\right) = \dim L\left(A_c\right)$$

- El *rango* de la matriz A es igual a la dimensión del *espacio renglón* o igual a la dimensión del *espacio columna* de la matriz A:

$$R\left(A\right) = \dim L\left(A_r\right) = \dim L\left(A_c\right)$$

El *rango* $R\left(A\right)$ de una matriz A se define como el número máximo de renglones distintos de cero que contiene esta matriz llevada a su forma escalonada.

12) WRONSKIANO

El concepto del *wronskiano* se emplea cuando se quiere determinar si un conjunto de funciones reales de variable real $A = \left\{ f_1, f_2, ..., f_n \right\}$ es *Linealmente Independiente* en un determinado intervalo (a,b). Con estos fines es posible establecer la ecuación de dependencia lineal para este conjunto en el intervalo (a,b) como:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$$

Si se deriva n-1 veces la expresión anterior, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_1 f_1'(x) & + & \alpha_2 f_2'(x) & + & \cdots & + & \alpha_n f_n'(x) & = & 0 \\
\alpha_1 f_1''(x) & + & \alpha_2 f_2''(x) & + & \cdots & + & \alpha_n f_n''(x) & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) & + & \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) & = & 0
\end{array}$$

El *wronskiano*, $W(x)$, del conjunto $A = \left\{ f_1, f_2, ..., f_n \right\}$ en el intervalo (a,b), es el determinante de la matriz de coeficientes del sistema homogéneo anterior, es decir:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Finalmente se dice que, si para algún valor $x_0 \in (a,b)$ el *wronskiano* es $W(x_0) \neq 0$, entonces el conjunto A es *Linealmente Independiente*.